Groupe A

PREMIÈRE COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Durée : 6 h.

Les parties II, III *et* IV *sont indépendantes de la partie* I.

I

Soit K un corps que l'on supposera être le corps des nombres réels ou celui des nombres complexes. Soit n un entier $\geqslant 2$. Si i et j sont deux entiers distincts compris entre 1 et n, et si $\lambda \in K$, on note $B_{ij}(\lambda)$ la matrice carrée (n, n) de coefficients b_{lc} vérifiant :

$$\begin{cases} b_{ll} = 1 & \text{si} \quad 1 \leqslant l \leqslant n \\ b_{lc} = 0 & \text{si} \quad l \neq c \quad \text{et} \quad (l, c) \neq (i, j) \\ b_{ij} = \lambda \end{cases}$$

1° Calculer $B_{ij}(\lambda)^{-1}$.

Soit $A = (a_{lc})$ une matrice carrée (n, n) de *déterminant non nul.*

2° Montrer qu'en multipliant la matrice A à droite par des matrices convenables de la forme $B_{ij}(\lambda)$ (i, j, λ variables), on peut obtenir une matrice A′ dont la première ligne est $(1, 0, 0, \ldots, 0)$.

3° Montrer que la matrice A peut se décomposer en $A = DC_1 C_2 \ldots C_r$, où C_k $(k = 1, \ldots, r)$ est une matrice de la forme $B_{ij}(\lambda)$ et où les coefficients d_{lc} de D vérifient :

$$\begin{cases} d_{ll} = 1 & \text{si} \quad 1 \leqslant l \leqslant n-1 \\ d_{nn} = \det(A) \\ d_{lc} = 0 & \text{si} \quad l \neq c. \end{cases}$$

II

Soit X un espace vectoriel sur K de dimension finie $n \geqslant 3$.

On appellera *involution* de X toute application linéaire T de X dans X telle que $T.T = 1_X$ (c'est-à-dire $T(T(x)) = x$ pour tout x de X). On appellera *homothétie* toute application linéaire U de X dans X telle qu'il existe $\lambda \in K$ vérifiant : $U(x) = \lambda x$ pour tout x de X.

1° Soit T une involution. Montrer qu'il existe deux sous-espaces uniques X_+ et X_- de X tels que $X = X_+ \oplus X_-$, $T(x) = x$ pour tout $x \in X_+$ et $T(x) = -x$ pour tout $x \in X_-$.

Montrer que si X_+ (respectivement X_-) n'est pas nul, il est le sous-espace propre de T associé à la valeur propre 1 (respectivement -1).

C'est pourquoi *nous appellerons dans ce problème* X_+ *et* X_-, par abus de langage, *les sous-espaces propres de* T (que X_+ et X_- soient nuls ou non).

2° Soit X_0 un sous-espace de X, distinct de X. Soit U une application linéaire de X dans X telle que pour tout x de X n'appartenant pas à X_0, il existe un scalaire $\lambda_x \in K$ satisfaisant $U(x) = \lambda_x . x$. Montrer que l'application U est une homothétie.

3° Soit T une involution sur X, X_+ et X_- les sous-espaces propres de T. Soit U une application linéaire de X dans X. Montrer que U.T = T.U si et seulement si $U(X_+) \subset X_+$ et $U(X_-) \subset X_-$.

4° Soit U une application linéaire de X dans X. Montrer que U commute avec toutes les involutions de X si et seulement si U est une homothétie.

5° Soient T et T′ deux involutions de X qui commutent. Montrer qu'il existe quatre sous-espaces vectoriels X_1, X_2, X_3, X_4 tels que $X_1 \oplus X_2$ et $X_3 \oplus X_4$ soient les sous-espaces propres de T, $X_1 \oplus X_3$ et $X_2 \oplus X_4$ les sous-espaces propres de T′.

6° Soient T et T′ deux involutions qui commutent et S une involution de X. Montrer que S commute avec T et T′ si et seulement si $S(X_i) = X_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant 4$.

Si T et T′ sont deux involutions, nous notons $(T, T')^*$ l'ensemble des involutions de X qui commutent avec T et T′, puis $(T, T')^{**}$ l'ensemble des involutions de X qui commutent avec tous les éléments de $(T, T')^*$.

7° Montrer que si T et T′ commutent, une involution S appartient à $(T, T')^{**}$ si et seulement si la restriction de S aux sous-espaces X_i (pour $1 \leqslant i \leqslant 4$) introduits dans 5° est une homothétie et que le nombre d'éléments de $(T, T')^{**}$ est 2^a où a est le nombre d'indices i $(1 \leqslant i \leqslant 4)$ tels que $\dim_K X_i \geqslant 1$.

8° Calculer le maximum du nombre d'éléments de $(T, T')^{**}$ lorsque T' parcourt l'ensemble des involutions qui commutent avec T dans les cas suivants :

a. T admet un sous-espace propre de dimension 0.

b. T admet un sous-espace propre de dimension 1.

c. Les sous-espaces propres de T sont de dimension $\geqslant 2$.

III

Une involution admettant un sous-espace propre de dimension 1 sera appelée une *involution extrêmale*. Si T_1 et T_2 sont deux involutions extrêmales, on notera Φ_i et X_i les sous-espaces propres de T_i de dimensions respectives 1 et $n-1$ (pour $i = 1,2$).

1° Montrer que deux involutions extrêmales T_1 et T_2 commutent si et seulement si on a l'un des deux cas suivants :

a. $\Phi_1 = \Phi_2$ et $X_1 = X_2$

b. $\Phi_1 \subset X_2$ et $\Phi_2 \subset X_1$

On considère désormais jusqu'à la fin du III deux involutions extrêmales T_1 et T_2 *qui ne commutent pas*. On notera $N = \Phi_1 + \Phi_2$ et $M = X_1 \cap X_2$.

2° *a.* Soit U une involution de $(T_1, T_2)^*$. Montrer que l'un des sous-espaces propres de U contient N et que l'autre est contenu dans M.

b. Soit U une involution telle que l'un de ses sous-espaces propres contienne N et que l'autre soit contenu dans M. Montrer que U appartient à $(T_1, T_2)^*$ (soient X_+, X_- les sous-espaces propres de U ; supposer $X_+ \supset N$ et $X_- \subset M$ et considérer la décomposition

$$X = \Phi_1 \oplus (X_+ \cap X_1) \oplus X_-).$$

3° Soit T une involution dont l'un des sous-espaces propres est contenu dans N et dont l'autre contient M. Montrer que T appartient à $(T_1, T_2)^{**}$.

4° Montrer que si $M \subset N$, alors $n = 3$ et toute involution appartient à $(T_1, T_2)^{**}$.

5° On suppose que $M \not\subset N$. Soit T une involution appartenant à $(T_1, T_2)^{**}$.

a. Montrer qu'un sous-espace propre de T contient M (considérer $x \in M$ et $x \notin N$ et une involution admettant comme sous-espaces propres Kx et un supplémentaire de Kx contenant N).

b. Si $N + M = X$, montrer qu'un sous-espace propre de T est contenu dans N (décomposer X sous la forme $X = N \oplus M'$ où $M' \subset M$).

c. Si $N + M \neq X$, montrer qu'il existe $y \in X$ tel que

$$X = (N + M) \oplus Ky.$$

Soit M' un sous-espace de M tel que $M = (M \cap N) \oplus M'$ et soit $m' \in M'$, $m' \neq 0$. Montrer que

$$N \oplus Ky \oplus M' = X, \quad N \oplus K(y + m') \oplus M' = X$$

et $(N \oplus Ky) \cap (N \oplus K(y + m')) = N$. En considérant la restriction de T à $N \oplus Ky$ et $N \oplus K(y + m')$ montrer qu'un sous-espace propre de T est contenu dans N.

d. En déduire que, pour qu'une involution S appartienne à $(T_1, T_2)^{**}$, il faut et il suffit qu'un sous-espace propre de S soit contenu dans N et que l'autre contienne M.

IV

1° Soient T_1 et T_2 deux involutions et T_3 et T_4 deux involutions appartenant à $(T_1, T_2)^{**}$. Montrer que $(T_3, T_4)^{**} \subset (T_1, T_2)^{**}$.

On dira qu'un couple de deux involutions extrêmales T_1 et T_2 qui ne commutent pas est *minimal* si pour tout couple T_3, T_4 de $(T_1, T_2)^{**}$ qui ne commutent pas, on a $(T_3, T_4)^{**} = (T_1, T_2)^{**}$. On se propose dans ce numéro IV de montrer que deux involutions extrêmales qui ne commutent pas forment un couple minimal si et seulement si elles admettent un sous-espace propre en commun.

2° Soit T_1, T_2 un couple minimal d'involutions extrêmales. Montrer que T_1 et T_2 ont un sous-espace propre en commun (avec les notations de III, supposer $X_1 \neq X_2$ et $\Phi_1 \neq \Phi_2$, considérer Φ_3 et Φ_4 deux sous-espaces de dimension 1 de N non contenus dans $X_1 \cap N$, considérer une involution T_3 admettant X_1 et Φ_3 comme sous-espaces propres et une involution T_4 admettant X_1 et Φ_4 comme sous-espaces propres ; montrer alors que $T_3 \in (T_1, T_2)^{**}$, $T_4 \in (T_1, T_2)^{**}$ et $T_2 \notin (T_3, T_4)^{**}$).

3° Soient T_1 et T_2 deux involutions extrêmales admettant un sous-espace propre commun. Montrer qu'elles forment un couple minimal.

V

On note Gl(X) le groupe des applications linéaires bijectives de X sur X et Sl (X) le sous-groupe des applications de déterminant 1. On appelle *automorphisme* de Gl (X) toute application bijective de Gl (X) sur lui-même telle que pour tous U et V de Gl (X), on ait :

$$f(U.V) = f(U).f(V).$$

1° Montrer que si $G \in Gl(X)$, l'application : $U \longmapsto G.U.G^{-1}$ est un automorphisme de $Gl(X)$.

Soit f un automorphisme de $Gl(X)$. On se propose dans ce paragraphe V de montrer que, sous certaines hypothèses sur f que l'on précisera, il existe G dans $Gl(X)$ tel que pour tout U de $Sl(X)$ on ait :

$$f(U) = G.U.G^{-1}.$$

2° Montrer que l'application réciproque f^{-1} de f est un automorphisme de $Gl(X)$.

3° Montrer que U est une involution si et seulement si $f(U)$ en est une.

4° Si T et T′ sont deux involutions, montrer que

$$f((T, T')^*) = (f(T), f(T'))^*$$

et que

$$f((T, T')^{**}) = (f(T), f(T'))^{**}.$$

5° Soit T une involution extrêmale, montrer que $f(T)$ est une involution extrêmale. (Utiliser II 8°).

6° Soient T et T′ deux involutions extrêmales qui ne commutent pas et qui ont un sous-espace propre commun. Montrer qu'il en est de même de $f(T)$ et $f(T')$. (Utiliser IV).

On appellera *droite* un sous-espace de dimension 1 et *plan* un sous-espace de dimension 2. On *supposera désormais jusqu'au paragraphe* VI que f vérifie la condition (C) :

(C) Il existe deux involutions extrêmales T et T′ qui ne commutent pas et qui admettent une droite D comme sous-espace propre commun, telles que les deux involutions extrêmales $f(T)$ et $f(T')$ admettent une droite Δ comme sous-espace propre commun.

7° Soit T″ une involution extrêmale admettant la droite D comme sous-espace propre. Montrer que $f(T'')$ admet Δ comme sous-espace propre.

Pour toute droite D′ de X, on notera Inv(D′) l'ensemble des involutions qui admettent D′ comme sous-espace propre.

8° Soit $A \in Gl(X)$. Montrer que l'application $T \longmapsto A.T.A^{-1}$ définit une bijection de Inv(D) sur Inv(A(D)). En déduire que f induit une bijection de Inv(A(D)) sur Inv$(f(A)(\Delta))$.

9° Montrer qu'il existe une bijection φ de l'espace des droites de X dans lui-même telle que f induise une bijection de Inv(D′) sur Inv$(\varphi(D'))$ pour toute droite D′ de X.

10° Montrer que si les droites D_1, D_2 et D_3 sont dans un même plan, alors $\varphi(D_1)$, $\varphi(D_2)$ et $\varphi(D_3)$ sont dans un même plan.

On *supposera désormais jusqu'au paragraphe* VI que φ vérifie la condition (D) :

(D) Il existe un élément G de $Gl(X)$ tel que $\varphi(D') = G(D')$ pour toute droite D′ de X.

11° Si T est une involution extrêmale admettant D et H comme sous-espaces propres de dimension 1 et $n-1$, montrer que G(D) et G(H) sont les sous-espaces propres de $f(T)$. En déduire que pour toute involution extrêmale T, on a : $f(T) = \pm G.T.G^{-1}$.

12° Montrer que s'il existe une involution extrêmale T_0 telle que $f(T_0) = G.T_0.G^{-1}$ (respectivement $f(T_0) = -G.T_0.G^{-1}$), alors pour toute involution extrêmale T on a : $f(T) = G.T.G^{-1}$ (respectivement $f(T) = -G.T.G^{-1}$).

(Remarquer que $\iota = \pm U.T_0.U^{-1}$ où $U \in Gl(X)$ et où le signe + ou — dépend des valeurs propres).

13° Montrer que tout élément de $Sl(X)$ est produit d'un nombre pair d'involutions extrêmales (utiliser I). En déduire que pour tout U de $Sl(X)$ on a : $f(U) = G.U.G^{-1}$.

VI

1° Trouver un automorphisme f_0 de $Gl(X)$ ne vérifiant pas la condition (C).

2° Montrer que si un automorphisme f de $Gl(X)$ ne vérifie pas la condition (C), alors $f_0^{-1}.f$ vérifie la condition (C).

3° Si K *est le corps des complexes,* trouver un automorphisme f de $Gl(X)$ vérifiant la condition (C) et tel que l'application φ construite au V 8° ne vérifie pas la condition (D).

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail